Problemy otwarte - dr hab. J. Przybyło

1 Rozkład grafów dwudzielnych na podgrafy lokalnie nieregularne

Wyznaczyć najmniejsze k takie, że każdy spójny graf dwudzielny, który nie jest ścieżką o nieparzystej liczbie krawędzi da się podzielić krawędziowo na k (niekoniecznie spójnych) grafów lokalnie nieregularnych. Przez graf lokalnie nieregularny rozumiemy graf, w którym wierzchołki sąsiednie mają różne stopnie. Innymi słowy, chcemy pokolorować krawędzie grafu k kolorami tak, by każdy kolor dawał graf lokalnie nieregularny, tzn. końce krawędzi w danym kolorze muszą się stykać z różną liczbą krawędzi w tym kolorze. Jest znana hipoteza, że wystarczą 3 kolory, możliwe nawet, że $k \leqslant 3$, a wiadomo, że $k \leqslant 7$.
Dodatkowo, warto pochylić się nad scharakteryzowaniem dla których spójnych grafów dwudzielnych o stopniu maksymalnym 3 wystarczą 3, a dla których 2 kolory.

2 Rozróżnianie wierzchołków w pokolorowanym grafie przez daltonistę

Niech $c : E(G) \to [k]$ będzie kolorowaniem (niekoniecznie właściwym) wierzchołków grafu G. Dla wierzchołka $v \in V$ definiujemy $\overline{c} = (a_1, \ldots, a_k)$, gdzie $a_i = |\{u : uv \in E(G), \quad c(uv) = i\}|$, dla $i \in [k]$. Jeśli uporządkujemy ciąg $\overline{c}(v)$ niemalejąco, uzyskamy ciąg $c^*(v) = (d_1, \ldots, d_k)$, nazywany *paletą* wierzchołka v. Jest to jedyna dostępna informacja o kolorowaniu grafu G, jaką może posiąść daltonista (przyjmujemy, że jest on w stanie odróżnić od siebie poszczególne kolory, jednak nie potrafi ich nazwać). Najmniejsze k, dla którego istnieje c takie, że c^* jest kolorowaniem właściwym wierzchołków grafu G nazywamy *indeksem daltonisty*, oznaczamy przez $\mathrm{dal}(G)$. Dotychczas uzasadniono, że dla grafów regularnym odpowiednio dużego stopnia $\mathrm{dal}(G) \leqslant 6$ oraz zbadano przypadek grafów dwudzielnych i pełnych o stopniu $n \geqslant 8$.

Dla tego problemu nie znamy rodziny grafów, dla których nie istnieje takie kolorowanie (bez względu na to jak dużą liczbę kolorów mielibyśmy do dyspozycji). Innymi słowy interesująca byłaby pełna (bądź nie) charakteryzacja grafów, dla których tego parametru nie da się zdefiniować.

3 Problem maksymalnej liczby kolorowań

Dla danego k (potencjalnie dużego) oraz λ, jaki jest graf o $2k$ wierzchołkach i k^2 krawędziach, który ma największą liczbę właściwych kolorowań wierzchołków λ kolorami? Przypuszcza się, iż jest to $K_{k,k}$ (graf pełny dwudzielny), ale potwierdzone to (ponoć) zostało jedynie w przypadku, gdy:
- λ jest duże w stosunku do k, tj. $\lambda >= k^5$,
- λ jest małe, tzn. $\lambda \leqslant 5$.
Dokładniej rzecz ujmując, dla małych λ, wiadomo to jedynie dla $\lambda \leqslant 3$, a dla $\lambda = 4$ znana jest tylko asymptotyka liczby takich kolorowań. Warto więc przyjrzeć się sytuacji, gdy $\lambda \geqslant 5$, a nawet dla $\lambda = 4$.

4 Hipoteza 1-2-3

Dla grafu $G = (V, E)$ określamy kolorowanie krawędziowe $c : E \to \{1, ..., n\}$, niekoniecznie właściwe, oraz definiujemy wagę wierzchołka jako sumę wag krawędzi z niego wychodzących. Dla jakiego najmniejszego n da się tak pokolorować dowolny graf, aby wagi dowolnych dwóch sąsiadów były różne? W innym wariancie chcemy aby dowolne dwa wierzchołki (niekoniecznie połączone) w grafie G miały różne wagi. Dotychczas udało się pokazać, że pięć kolorów wystarczy. Hipoteza (tzw. hipoteza 1-2-3) mówi, że wystarczą trzy kolory. Sam problem jest dość trudny, ale jest kilka powiązanych z nim zagadnień.

1 Grafy (H,k)-stabilne - dr hab. A. Żak

Kosztem grafu nazywamy sumę liczebności jego zbioru wierzchołków oraz liczebności jego zbioru krawędzi. Niech H będzie dowolnym grafem oraz niech k będzie liczbą naturalną większą od 0. Mówimy, że graf G jest (H, k)-stabilny, jeśli po usunięciu dowolnych k wierzchołków graf G zawiera H jako podgraf. Problem ogólnie polega na znalezieniu (dla ustalonych H i k) minimalnego kosztu grafu (H, k)-stabilnego. Zadaniem dla koła byłoby zajęcie się tym problemem dla pewnym grafów H takich jak kieł $K_{1,3}$ czy graf powstały ze ścieżki P_2 przez dołączenie wierzchołka izolowanego.