Rozgrywane kolorowanie - Problemy

Definicja 1 (Rozgrywane kolorowanie grafów)**.** *Niech dany będzie graf G i zbiór kolorów C, $|C| = r$.*

Dwóch graczy Alice i Bob naprzemian kolorują wierzchołki grafu G. Alice rozpoczyna grę. Każdy gracz koloruje jeden wierzchołek. Wierzchołek v może zostać pokolorowany kolorem $c \in C$, jeżeli v nie ma sąsiadów pokolorowanych kolorem c. Jeżeli po $|V(G)|$ ruchach graczy graf G został pokolorowany, to grę wygrywa Alice, w przeciwnym razie grę wygrywa Bob.

Dla danego grafu G najmniejszą liczbę kolorów r, dla której Alice ma strategię wygrywającą, nazywamy rozgrywaną liczbą chromatyczną i oznaczamy $\chi_g(G)$.

Definicja 2 (Rozgrywane d-niewłaściwe wierzchołkowe kolorowanie grafu)**.** *Niech dany będzie graf G, liczba naturalna d i zbiór kolorów C, $|C| = r$.*

Dwóch graczy Alice i Bob naprzemian kolorują wierzchołki grafu G. Alice rozpoczyna grę. Każdy gracz koloruje jeden wierzchołek. Gracz może pokolorować wierzchołek kolorem $c \in C$, jeżeli po jego ruchu zbiór wierzchołków pokororowanych kolorem c indukuje graf o maksymalnym stopniu co najwyżej d. Jeżeli po $|V(G)|$ ruchach graczy graf G został d-niewłaściwie pokolorowany, to grę wygrywa Alice, w przeciwnym razie grę wygrywa Bob.

Najmniejszą liczbę kolorów r, dla której Alice ma strategię wygrywającą w rozgrywane d-niewłaściwe wierzchołkowe kolorowanie grafu G, nazywamy rozgrywaną d-niewłaściwą liczbą chromatyczną i oznaczamy $\chi_g^{(d)}(G)$.

Problem 1

Literatura: [5]

Wiadomo, że $\chi_g(T) \leq 4$ dla dowolnego drzewa T (dowód znajduje się w pracy [6]). Ponadto istnieją drzewa, dla których Alice potrzebuje 4 kolorów, by wygrać grę. Takie drzewo zostało pokazane w pracy [2]. Pojawia się pytanie, jak wyglądają drzewa, na których Alice potrafi wygrać grę, gdy ma do dyspozycji trzy kolory (tzn. drzewa z rozgrywaną liczbą chromatyczną co najwyżej trzy). W pracy [5] zostały scharakteryzowane grafy acykliczne z $\chi_g(T) = 2$ oraz została opisana rodzina drzew z $\chi_g(T) = 3$, ale nie podano pełnej charakteryzacji wszystkich drzew z rozgrywaną liczbą chromatyczną równą 3.

Problem. *Scharakteryzować grafy acykliczne o rozgrywanej liczbie chromatycznej co najwyżej trzy.*

Problem 2

Literatura: [5, 3]

W pracy [3] udowodniono, że $\chi_g^{(1)}(G) \leq 3$ dla dowolnego grafu acyklicznego G oraz pokazano, że istnieje drzewo T z $\chi_g^{(1)}(T) = 3$. Podobnie, jak w problemie 1, możemy zastanawiać się, jak wyglądają grafy acykliczne (drzewa), na których Alice potrafi wygrać grę w 1-niewlaściwe kolorowanie, gdy ma do dyspozycji dwa kolory.

Problem. *Scharakteryzować grafy acykliczne T, dla których $\chi_g^{(1)}(T) \leq 2$.*

lub

Problem. *Wskazać (podobnie jak w pracy [5]) rodzinę drzew z $\chi_g^{(1)}(T) \leq 2$.*

Problem 3

Literatura: [4]

Może się wydawać, że jeżeli w rozgrywanym niewłaściwym kolorowaniu będziemy zwiększali liczbę d (tzn. pozwolimy aby wierzchołek miał więcej sąsiadów w swoim kolorze), to Alice będzie potrzebowała mniej kolorów aby wygrać. Niestety nie jest to prawdą, jako przykład łatwo sprawdzić, że $\chi_g(K_{n,n}) = 3$ i $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$. Znany jest tylko przykład dla $d = 0$. W pracy [4] pokazano, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje graf G taki, że $m \leq \chi_g(G) < \chi_g^{(1)}(G)$.

Problem. *Czy dla każdej liczby naturalnej d istnieje graf G taki, że $\chi_g^{(d)}(G) < \chi_g^{(d+1)}(G)$?*

Problem 4

Literatura: [8]

W pracach [1, 8] rozważano rozgrywaną liczbę chromatyczną produktu kartezjańskiego grafów. Do tej pory nie był badane rozgrywane d-niewłaściwe kolorowanie produktu kartezjańskiego grafów.

Problem. *Wyznaczyć rozgrywaną 1-niwełaściwą liczbę chromatyczną produktu kartezjańskiego grafów.*

References

[1] T. Bartnicki, B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz, and I. Peterin, *Game chromatic number of Cartesian product graphs*, Electron. J. Combin. 15 (2008) R72.

[2] H. L. Bodlaender, *On the complexity of some coloring games*, Internat. J. Found. Comput. Sci. 2 (1991) 133–147.

[3] C. Chou, W. Wang, X. Zhu, Relaxed game chromatic number of graphs, Discrete Math. 262 (2003) 89–98.

[4] C. Dunn, *Complete Multipartite Graphs and the Relaxed Coloring Game*, Order 29 (2012) 507–512.

[5] Ch. Dunn, V. Larsen, K. Lindke, T. Retter, D. Toci, *The Game Chromatic Number of Trees and Forests*, DMTCS 17 (2015) 31–48.

[6] U. Faigle, U. Kern, H.A. Kierstead, W.T. Trotter, On the game chromatic number of some classes of graphs, Ars Combin. 35 (1993) 143–150.

[7] X. Zhu, *Game coloring the Cartesian product of graphs*, J. Graph Theory 59 (2008) 261–278.

[8] Charmaine Sia *The Game Chromatic Number of Some Families of Cartesian Product Graphs*, manuscript.

Indeks rozróżniający grafu G

Indeksem rozróżniającym $D'(G)$ grafu G nazywamy najmniejszą liczbę kolorów, taką że G posiada kolorowanie krawędziowe $D'(G)$kolorami (nie musi być właściwe!), które zostaje zachowane jedynie przez automorfizm identycznościowy.

Problem: Czy dla każdego dwuspójnego grafu G spełniona jest nierówność:

$$D'(G) \leq \sqrt[\delta(G)]{\Delta(G)}$$

gdzie $\delta(G) - minimalny\ stopie\acute{n}\ w\ grafie$,

$\Delta(G) - maksymalny\ stopie\acute{n}\ w\ grafie$.

Alternatywnie: Czy dla każdego grafu dwuspójnego G istnieje kolorowanie rozróżniające $\sqrt[\delta(G)]{\Delta(G)}$ kolorami?

Problem samotnego biegacza

Wyobraźmy sobie biegaczy na okrągłej bieżni. Startują z tego samego miejsca, po czym każdy biegnie z inną prędkością (tj. inną niż każdy z pozostałych biegaczy). Hipoteza mówi, że po upływie odpowiednio długiego czasu każdy biegacz będzie na bieżni przynajmniej przez chwilę samotny. „Samotność” danego biegacza polega na tym, że żaden z pozostałych biegaczy nie znajduje się bliżej niż *1/n* obwodu bieżni, gdzie *n* to liczba biegaczy. Problem równoważny temu problemowi to problem który pyta o to czy istnieje taki moment, chwila *t*, w której w odległości *1/(n+1)* od mety nie ma żadnego biegacza. (Dowód dla *n* biegaczy w wersji z metą daje dowód dla *n+1* biegaczy w pierwotnym sformułowaniu.)